УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 151, кн. 2* Физико-математические науки *2009*

УДК 519.95

# О СИНТЕЗЕ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ СХЕМ И ОБ ОЦЕНКАХ ДЛИНЫ ТЕСТОВ

*Н.П. Редькин*

**Аннотация**

В статье рассматриваются единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов при инверсных неисправностях на выходах элементов, проверяющие тесты для схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов, единичные диагностические тесты для схем в бесконечном базисе, минимальные тесты для схем, реализующих дизъюнкцию. Приводятся новые оценки длины этих тестов. Эти оценки в ряде случаев являются неулучшаемыми.

**Ключевые слова:** булевы функции, схемы из функциональных элементов, неисправности элементов, проверяющий тест, диагностический тест.

---

Приведем основные определения, касающиеся тестов для схем из функциональных элементов (см., например, [1,2]). Пусть $S$ – схема из функциональных элементов в базисе Б, которая в исправном состоянии реализует некоторую булеву функцию $f(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что на схему $S$ воздействует некоторый источник неисправностей, под влиянием которого какие-то элементы схемы (в общем случае – совершенно произвольные) могут перейти в неисправные состояния. Источник неисправностей обычно описывается перечнем тех функций, которые могут реализовывать элементы базиса при переходе в неисправные состояния. Всякая функция $g(\tilde{x})$, реализуемая схемой $S$ при наличии в ней неисправных элементов, называется *функцией неисправности*. Функция неисправности $g(\tilde{x})$ считается *тривиальной*, если $g(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x})$, и *нетривиальной*, если $g(\tilde{x}) \not\equiv f(\tilde{x})$. Пусть $G = \{g_1(\tilde{x}), \ldots, g_r(\tilde{x})\}$ – множество всех нетривиальных функций неисправностей для заданной схемы $S$ и заданного источника неисправностей.

Всякое множество $T$ наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется *полным проверяющим тестом* (ППТ) для схемы $S$, если для любой нетривиальной функции неисправности $g_i(\tilde{x})$ из $G$ в $T$ найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $f(\tilde{\sigma}) \neq g_i(\tilde{\sigma})$; множество наборов $T$ называется *полным диагностическим тестом* (ПДТ) для $S$, если $T$ является полным проверяющим тестом для $S$ и для любой пары $(g_i, g_j)$ функций неисправностей из $G$ в $T$ найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g_i(\tilde{\sigma}) \neq g_j(\tilde{\sigma})$ $(i \neq j)$.

Если в схеме допускается только одна неисправность (одного элемента), то соответствующий тест считается *единичным* – проверяющим (ЕПТ) или диагностическим (ЕДТ). При исследовании единичных тестов обычно рассматриваются *неизбыточные* схемы, которые при появлении любой (допустимой) одной неисправности реализуют нетривиальные функции неисправности [2].

Число наборов в любом тесте называется *длиной* этого теста; для теста $T$ длину его обозначим через $L(T)$.

Пусть рассматривается какой-либо определенный вид тестов (ППТ, или ПДТ, или ЕПТ, или ЕДТ). Тогда $L(S) = \min L(T)$, где минимум берется по всем тестам рассматриваемого вида для $S$; $L(f) = \min L(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим булеву функцию $f(\tilde{x})$; $L(n) = \max L(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям от $n$ переменных.

Главные задачи теории тестов для схем из функциональных элементов – это исследование поведения функции Шеннона $L(n)$, а для индивидуальных булевых функций $f$ – поведения функции $L(f)$. Это классические задачи. Могут быть и другие постановки, когда, например, вводятся дополнительные «контрольные точки», то есть разрешается при тестировании наблюдать и учитывать реализуемые схемой функции не только на выходе схемы, но еще и в некотором количестве внутренних вершин; или когда, скажем, используются функциональные элементы, имеющие не по одному, а по несколько выходов.

Ниже приводятся результаты, полученные за последние примерно пять-шесть лет на кафедре дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

## 1. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов

Пусть задан произвольный функционально полный конечный базис Б. Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в базисе Б и будем допускать одиночные *инверсные неисправности на выходах* элементов. Это означает, что если некоторый элемент в исправном состоянии реализует булеву функцию $\varphi$ от подаваемых на его входы переменных, то в неисправном состоянии этот элемент реализует $\overline{\varphi}$. Неисправным в схеме может быть только один (любой) элемент.

Имеет место

**Теорема 1 [3].** *Любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест не более чем из трех наборов.*

## 2. Проверяющие тесты для схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов

Здесь предполагается, что источник неисправностей вызывает *однотипные константные неисправности типа* $\delta$, $\delta \in \{0,1\}$, *на выходах* элементов, заключающиеся в том, что всякий перешедший в неисправное состояние элемент вместо приписанной ему функции (например, конъюнкции подаваемых на его входы переменных) начинают выдавать булеву константу $\delta$. Для этого случая получен ряд результатов (большей частью являющихся уже окончательными).

**Теорема 2 [4–6].** *Для любого натурального* $n \geqslant 2$ *выполняется равенство*

$$L_{\text{ППТ}}^{\{\&,\vee,^-\}}(n) = 2.$$

**Теорема 3 [7].** *Для любой монотонной булевой функции* $f$ *имеет место равенство*

$$L_{\text{ППТ}}^{\{\&,\vee,^-\}}(f) = 1.$$

**Теорема 4 [6].** *В случае неисправностей типа «1» для любого натурального* $n$ *выполняется равенство*

$$L_{\text{ЕПТ}}^{\{\&,\oplus,1,0\}}(n) = 1.$$

**Теорема 5 [6].** *В случае неисправностей типа «0» для любого натурального $n$ выполняется неравенство*
$$L_{\text{ЕПТ}}^{\{\&,\oplus,1,0\}}(n) \leqslant 2.$$

Здесь и ниже верхние индексы в обозначениях функций Шеннона указывают базис, а нижние – вид теста. Символ «$\oplus$» означает сложение по модулю два; определение монотонной булевой функции можно найти, например, в [8]. Верхние оценки в теоремах 1–5 (и всех последующих) получаются конструктивно – построением подходящих схем. Нижняя оценка теоремы 2 следует из установленной соответствующей нижней оценки для эквивалентности

$$L_{\text{ППТ}}^{\{\&,\vee,^{-}\}}(x \sim y) \geqslant 2;$$

в теоремах 3, 4 нижние оценки очевидны.

Пусть $F_{n,m}$ – булев оператор из $m$ отличных от констант булевых функций $f_1(\tilde{x}),\ldots,f_m(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, а $S$ – схема из функциональных элементов, реализующая $F_{n,m}$. Набор $G = (g_1(\tilde{x}),\ldots,g_m(\tilde{x}))$ функций неисправностей схемы $S$ считается ***нетривиальным***, если хотя бы одна функция $g_i(\tilde{x})$ из $G$ отлична от соответствующей ей функции $f_i(\tilde{x})$, то есть $g_i(\tilde{x}) \not\equiv f_i(\tilde{x})$. Множество $T$ входных наборов значений переменных схемы $S$ называется ***полным проверяющим тестом для*** $S$, если для любого нетривиального набора функций неисправностей $(g_1(\tilde{x}),\ldots,g_m(\tilde{x}))$ в $T$ найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $(f_1(\tilde{\sigma}),\ldots,f_m(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}),\ldots,g_m(\tilde{\sigma}))$.

**Теорема 6 [6].** *Любую систему $F_{n,m}$ из $m$ отличных от констант булевых функций можно реализовать схемой в базисе $\{\&,\vee,^{-}\}$, допускающей полный проверяющий тест не более чем из $k+1$ наборов, где $k$ – число функций из $F_{n,m}$, сохраняющих единицу.*

В последней теореме верхняя оценка длины теста в общем случае неулучшаема.

**Теорема 7 [6].** *Любую систему из $m$ отличных от констант монотонных булевых функций можно реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест из двух наборов.*

Главная идея, используемая при получении верхних оценок теорем 1–7, заключается в добавлении в схему специальных «контрольных» элементов или даже цепей из элементов, которые сами по себе, в общем-то, и не участвуют в вычислении реализуемой схемой функции, но зато определенным образом «реагируют» на поломки элементов схемы и тем самым позволяют достаточно просто (то есть с использованием небольшого числа тестовых наборов) обнаружить переход схемы в неисправное состояние, когда схема реализует уже нетривиальную функцию неисправности, отличную от исходной функции, реализуемой схемой в исправном состоянии.

## 3. Диагностические тесты для схем в одном бесконечном базисе

В математической теории сложности схем из функциональных элементов установлено (прежде всего в работах О.Б. Лупанова), что при усложнении элементов базиса (при увеличении числа входов у элементов) для «почти всех» булевых функций можно добиться существенного уменьшения сложности схем, оцениваемой, скажем, числом функциональных элементов в схемах. Крайним случаем усложнения базисов естественно считать переход к бесконечным базисам. Исследования сложности схем в бесконечных базисах проводились рядом авторов, и было установлено, что переход к бесконечному базису, как правило, позволяет весьма существенно понизить рост функции Шеннона, задающей наименьшее возможное число функциональных элементов, достаточное для реализации схемой любой булевой функции от $n$ переменных.

Результаты подобных исследований по сложности схем закономерно наводят на мысль о постановке соответствующих тестовых задач по диагностике и контролю исправности схем. Представляется актуальным, например, такой вопрос: можно ли добиться существенного (и насколько существенного) сокращения длины тестов для схем при переходе к бесконечным базисам? Здесь мы приводим пример бесконечного базиса, позволяющий дать утвердительный ответ на поставленный вопрос.

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов в бесконечном базисе Б $= \{x_1\&x_2, x_1\&x_2\&x_3, \ldots; x_1\vee x_2, x_1\vee x_2\vee x_3, \ldots; \overline{x}\}$ (в Б входят конъюнкции и дизъюнкции от любого числа переменных и отрицание). Для функциональных элементов схем будем предполагать возможными однотипные константные неисправности на выходах элементов. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8 [9].** *Любую булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, $n \geqslant 1$, можно реализовать схемой в базисе Б, допускающей единичный диагностический тест, длина которого не превосходит $2\lceil\log_2(n+1)\rceil+2$.*

**Замечание.** Для аналогичной задачи синтеза легкотестируемых схем в конечном базисе $\{x_1\&x_2, x_1\vee x_2, \overline{x}\}$ наилучшая известная к настоящему времени верхняя оценка длины единичного диагностического теста носит линейный (по $n$) характер [10]: любую булеву функцию от $n$ переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x_1\&x_2, x_1\vee x_2, \overline{x}\}$, допускающей единичный диагностический тест, длина которого не превосходит $2n+1$.

Существенной особенностью схем, используемых при доказательстве теоремы 8, является то, что эти схемы содержат мало (не более чем $\lceil\log_2(n+1)\rceil$) инверторов; возможность реализации любой булевой функции от $n$ переменных схемой, содержащей такое число инверторов, установлена А.А. Марковым в [11].

## 4. О минимальных тестах для схем, реализующих дизъюнкцию

Тесты для схем, реализующих дизъюнкцию, рассматривались в [12]. В качестве неисправностей предполагались инверсные неисправности: а) на входах схем; б) на входах элементов схем; в) на выходах элементов схем.

Если на некоторый исправный вход схемы подается переменная $x$, то при переходе этого входа в неисправное состояние на него подается $\overline{x}$. Для инверсных неисправностей на входах схем тесты определяются только реализуемой функцией, а потому часто называются тестами функций.

**Теорема 9 [12].** *Минимальный единичный проверяющий тест функции $x_1\vee\ldots\vee x_n$ содержит один набор, а минимальный единичный диагностический тест этой же функции содержит $n$ наборов.*

**Теорема 10 [12].** *Минимальный полный проверяющий тест функции $x_1\vee\ldots\vee x_n$ содержит один набор, а минимальный полный диагностический тест этой же функции содержит $2^n-1$ наборов.*

Если исправный элемент $E$ при подаче на его 1-й, …, $i$-й, …, $k$-й входы переменных $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ реализует $\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$, то в случае инверсной неисправности $i$-го входа этот элемент реализует $\varphi(x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_k)$, а в случае инверсной неисправности на выходе элемента $E$ он будет выдавать $\overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$.

Для инверсных неисправностей на входах элементов доказана

**Теорема 11 [12].** *Для любого натурального $n \geqslant 2$ имеет место соотношение*

$$L^{\{\vee\}}_{\text{ЕПТ}}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = L^{\{\vee\}}_{\text{ЕДТ}}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = 1.$$

Для инверсных неисправностей на выходах элементов справедлива

**Теорема 12 [12].** *Для любого натурального $n \geqslant 2$ имеет место соотношение*

$$L^{\{\vee\}}_{\text{ЕПТ}}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = L^{\{\vee\}}_{\text{ЕДТ}}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = 2.$$

Утверждения теорем 11 и 12 справедливы и для схем в полном базисе $\{x \to y, \overline{x}\}$ [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00863) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-4470.2008.1)

**Summary**

*N.P. Redkin.* On the Synthesis of Schemes Permitting Short Tests and on the Estimates of the Test Lengths.

The paper regards single checking tests for schemes of functional elements by inverse errors on the element outputs, along with checking test for schemes in case of one-type constant errors on the element outputs, single diagnostic tests for schemes in the infinite basis, minimal tests for schemes realizing disjunction. The new estimates are produced for the length of these tests. In certain cases these estimates are best possible.

**Key words:** Boolean functions, schemes of functional elements, element errors, checking test, diagnostic test.

**Литература**

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 138 с.

2. *Редькин Н.П.* Надежность и диагностика схем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. – 192 с.

3. *Редькин Н.П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Физматлит, 2003. – Вып. 12. – С. 217–230.

4. *Бородина Ю.В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Материалы IX междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения», посв. 75-летию со дня рожд. акад. О.Б. Лупанова (Москва, 2007). – М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. – С. 64–65.

5. *Бородина Ю.В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.. – 2008. – № 1. – С. 40–44.

6. *Бородина Ю.В.* Синтез легкотестируемых схем при константных неисправностях на выходах элементов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2008. – 12 с.

7. *Бородина Ю.В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискр. матем. – 2005. – Т. 17, Вып. 1. – С. 129–140.

8. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

9. *Редькин Н.П.* О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2007. – № 3. – С. 29–33.

10. *Редькин Н.П.* О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1992. – № 5. – С. 43–46.

11. *Марков А.А.* Об инверсионной сложности систем функций // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 116, № 6. – С. 917–919.

12. *Беджанова С.Р.* О минимальных тестах для схем, реализующих дизъюнкцию // Дискр. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 3–11.

Поступила в редакцию
01.04.09

**Редькин Николай Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

E-mail: *npredkin@yandex.ru*